MODERNE ERDMESSUNG

Kurt Bretterbauer, TU Wien

Das Ziel dieser Schrift ist, über die moderne Erdmessung, oder Geodäsie, zu informieren. Es scheint dies notwendig, weil selbst unter mathematisch Gebildeten weitgehende Unkenntnis der Probleme und Erfolge der Erdmessung herrscht. Gerade aber die Geodäsie wäre geeignet, Schülern eine Vorstellung von den Anwendungen der Mathematik zu geben. Die Mathematik verdankt der Geodäsie viele Anregungen und Impulse. Felix Klein hat gemeint, die Geodäsie sei ein glänzendes Beispiel, was man mit der Mathematik in den Anwendungen machen kann und wie man es machen soll. Mit den landläufigen Vorstellungen über die Arbeit des Geometers oder Feldmessers hat die moderne Erdmessung allerdings nur mehr recht wenig zu tun.

Die moderne Erdmessung begann vor etwa 25 Jahren mit der Entwicklung von leistungsfähigen Rechenautomaten, von elektromagnetischen Entfernungsmeßgeräten und mit dem Start künstlicher Satelliten. Die Aufgabe der Geodäsie ist die Erfassung der globalen geometrischen und physikalischen Parameter der Erde, die Untersuchung der Struktur ihres Schwerefeldes und die Definition von geometrischen und physikalischen Erdmodellen in einheitlichen Weltkoordinatensystemen. Die Präzision und Schnelligkeit mit der die Geodäsie schon heute ihre Aussagen machen kann, erlaubt es, die Veränderungen des Erdkörpers und seiner Parameter zu bestimmen. Die Raumfahrt schließlich hat es möglich, aber auch notwendig gemacht, die irdische Problemstellung auf den Mond und die Planeten zu übertragen (Selenodäsie bzw. Planetodäsie).

Im folgenden wird versucht, die prinzipiellen Probleme und Lösungsansätze zu erläutern. Die Geodäsie verfügt nur in wenigen Fällen über strenge Lösungen, meist gewinnt sie ihre Lösungen nur approximativ über Reihenentwicklungen, oder durch Iteration, wobei sich häufig das Hauptglied der Reihe bzw. der erste Iterationsschritt durchaus auf AHS- und BHS-Niveau darstellen lassen. Manche Lösungen sind überhaupt elementar, die Schwierigkeit liegt dann in der numerischen Verarbeitung sehr vieler mit Fehlern behafteter Meßdaten. Ein erfahrener Schulpädagoge könnte in Zusammenarbeit mit einem Geodäten eine Fülle von Beispielen für einen anwendungsorientierten Mathematik- und Physikunterricht erarbeiten.

Es ist nicht die Aufgabe der Erdmessung, die topographische Erdoberfläche zu vermessen und darzustellen, sie muß aber die Grundlagen dazu liefern. Dazu gehört vor allem die Definition geeigneter Koordinatensysteme. Dies ist keineswegs nur ein geometrisches Problem, sondern immer auch ein physikalisches Problem. Die Position eines Punktes im Raum wird normalerweise durch Angabe von drei Koordinaten gegeben, am besten in einem rechtwinkeligen cartesischen System. In einem solchen System ist keine Koordinate vor der anderen bevorzugt. Gerade das aber, nämlich die Bestimmung der drei Koordinaten eines Punktes in einem cartesischen System, ist der Geodäsie erst seit kurzem möglich. Bisher wurde, und wird im praktischen Vermessungswesen auch weiterhin, die Position eines Punktes getrennt nach Lage und Höhe bestimmt. Dabei gehören Lage und Höhe zwei völlig verschiedenen Systemen an, und die sog. "Meereshöhe" kann fast zehnmal genauer bestimmt werden als die Lage. In alle Definitionen von Koordinatensystemen geht das Schwerefeld der Erde ein, deshalb steht dieses im Zentrum der Betrachtungen der Geodäsie.

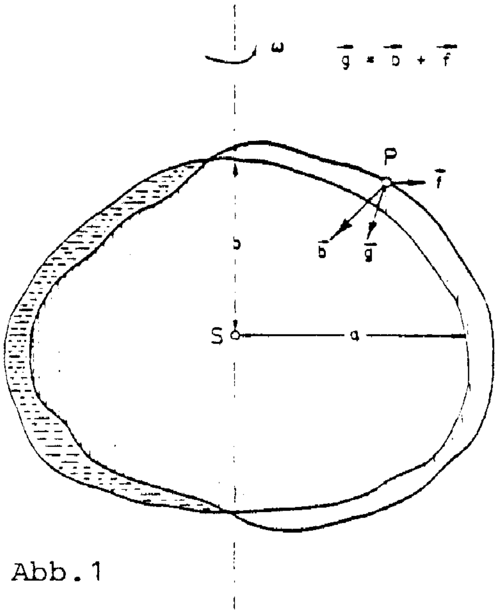


Abb. 1

Jedes ruhende Masseteilchen der Erde unterliegt zwei Beschleunigungen, der reinen Gravitationsbeschleunigung und der aus der Rotation folgenden Zentrifugalbeschleunigung. Die Resultierende der beiden Beschleunigungsvektoren nennt man die Schwerebeschleunigung, kurz die Schwere $\vec{g}$. Es ist klar, daß ein rotierender Himmelskörper, der aus gegeneinander leicht verschiebbaren Masseteilchen besteht, eine solche Form annehmen muß, daß seine Oberfläche überall senkrecht auf den Schwerevektor steht; seine Figur wird an den Polen abgeplattet sein. Mit diesen Fragen beschäftigt sich eine eigene, sehr schwierige Disziplin, die "Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten". Eine wichtige Erkenntnis hat schon 1743 CLAIRAUT in der fundamentalen Näherungsformel gewonnen:

$$f = \frac{5}{2}\varepsilon - \beta .$$

Darin ist f die geometrische Abplattung((f = (a - b)/a; a, b sind die Halbachsen der Erdfigur, siehe Abb.1)). ε ist das Verhältnis der Fliehkraft am Äquator zur Schwere am Äquator; β heißt die Schwereabplattung (($\beta = (g_{Pol} - g_{Äqu})/g_{Äqu}$)). Zwei dynamische Grössen ergeben also eine geometrische Größe.

Man beachte: Die Gleichgweichtsfigur eines rotierenden Himmelskörpers ist zwar an den Polen abgeplattet, aber im allgemeinen kein Rotationsellipsoid! Dies könnte nur der Fall sein, wenn der Körper homogen ist und wenn Dichte, Abplattung und Rotationsdauer in einer strengen, theoretisch begründeten Beziehung zueinander stehen (MacLAURINsche Bedingung). Dennoch arbeitet die Geodäsie mit einem Rotationsellipsoid als einfachste Näherungsfigur des Erdkörpers.

Die infolge der Schwere auf eine Masse wirkende Kraft ist ausserordentlich klein: Ganze 6000 Trillionen Tonnen müssen aufgeboten werden, damit eine Masse von 1 kg mit der Kraft von 10 N angezogen wird. Dennoch kann heute der Betrag des Schwerevektors auf nahezu 1:100 Millionen genau nach der Freifall- oder Freiwurfmethode gemessen werden. Die Zeitmessung geschieht mit Kurzzeitintervallzählern, die Längenmessung durch Interferometrie. Beim freien Fall folgt zunächst aus der Beziehung: $\ddot{s} = g$ (s = Weg) durch Integration $s = s_o + v_o t + \frac{g}{2} t^2$ (t = Zeit). Beobachtet man die Durchgangszeiten durch 3 Ebenen, so können die Integrationskonstanten s_o und v_o eliminiert werden. Beim freien symmetrischen Wurf reicht die Beobachtung durch zwei Ebenen im Abstand h aus. Die Herleitung der Schwerebeschleunigung aus der Schwingungsdauer eines Pendels ist von prinzipieller Bedeutung, wird aber nur mehr selten angewendet. Die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels ist: $\ell \ddot{\varphi} + g \sin\varphi = \emptyset$ (φ = Phasenwinkel, ℓ = Pendellänge); ihre Integration führt auf ein elliptisches Integral 1.Gattung. Die bekannte Formel für die Schwingungsdauer eines Pendels $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ ist nur eine Näherungsformel für verschwindend kleine Amplitude des Pendels. Die Messung von Schweredifferenzen erfolgt mit sog. Gravimetern, das sind im Prinzip äußerst verfeinerte Federwaagen. Ihre Genauigkeit reicht bis zu $\pm$ 1.10^{-9} des Absolutbetrages der Schwere. Die Schwerebeschleunigung kann heute sogar auf Schiffen und in Flugzeugen gemessen werden. Dabei müssen die auftretenden

Störbeschleunigungen des Fahrzeuges von der Erdschwerebeschleunigung durch geeignete Filterung (Calman-Filter) getrennt werden. Die Genauigkeit ist noch relativ gering.

Die durch die Rotation bedingte Fliehkraft verschwindet selbstverständlich an den Polen und erreicht im Äquator ihr Maximum von etwa 3 $^{o}/oo$ der Schwerkraft. Übrigens wird die Rotationsdauer der Erde oft selbst von gebildeten Leuten falsch eingeschätzt. Sie beträgt nämlich nicht 24^h, sondern $23^h56^m04^s{,}09$!

Die Richtung des Schwerevektors kann auf astronomischem Wege auf Bruchteile von Winkelsekunden genau gemessen werden, und man verfügt daher heute in vielen Punkten der festen Erdoberfläche über die volle Kenntnis des Schwerevektors. In der Theorie wird allerdings nicht mit den Schwerevektoren gearbeitet, sondern mit einer skalaren Ortsfunktion, deren Gradient eben der Schwerevektor ist. Diese Ortsfunktion heißt Potential und stellt nichts anderes dar, als die Arbeit die gegen die Schwerkraft geleistet werden muß, um die Masseneinheit von der Erde ins Unendliche zu bringen. Das Gesamtpotential W setzt sich zusammen aus dem Potential der Gravitation V und dem Potential der Fliehkraft Φ:

$$W = V + \Phi = G \int\limits_{\text{Erde}} \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

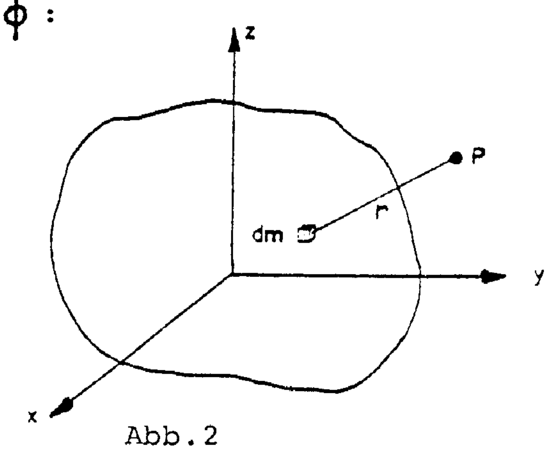


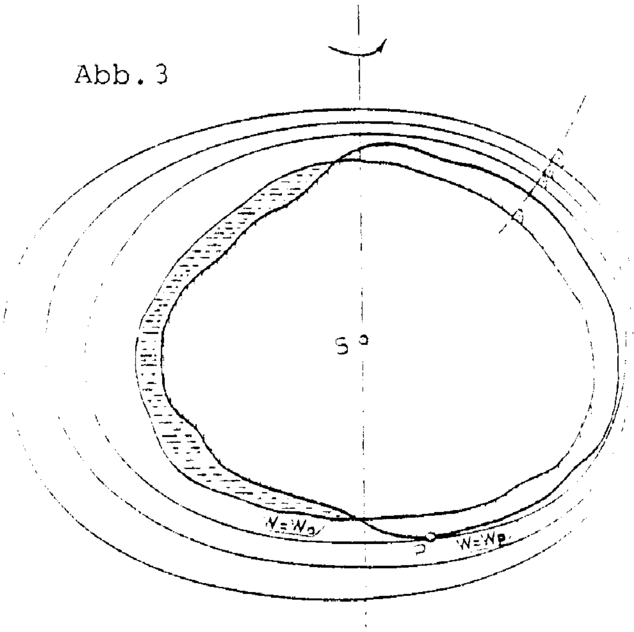
Abb.2

ω = Winkelgeschwindigkeit
G = Gravitationskonstante.

Der Schwerevektor ist also: $\vec{g}$ = grad W.
Das Potential selbst ist nicht meßbar, wohl aber Potentialdifferenzen. Eine wichtige Eigenschaft des Gravitationspotentials V ist, daß es im Außenraum der Masse die LAPLACEsche Differentialgleichung ($\Delta V = \emptyset$) erfüllt, im Außenraum also eine harmonische Funktion ist; im Innenraum dagegen erfüllt es die Differentialgleichung von POISSON ($\Delta V = - 4\pi G\varrho$; ϱ = Dichte).

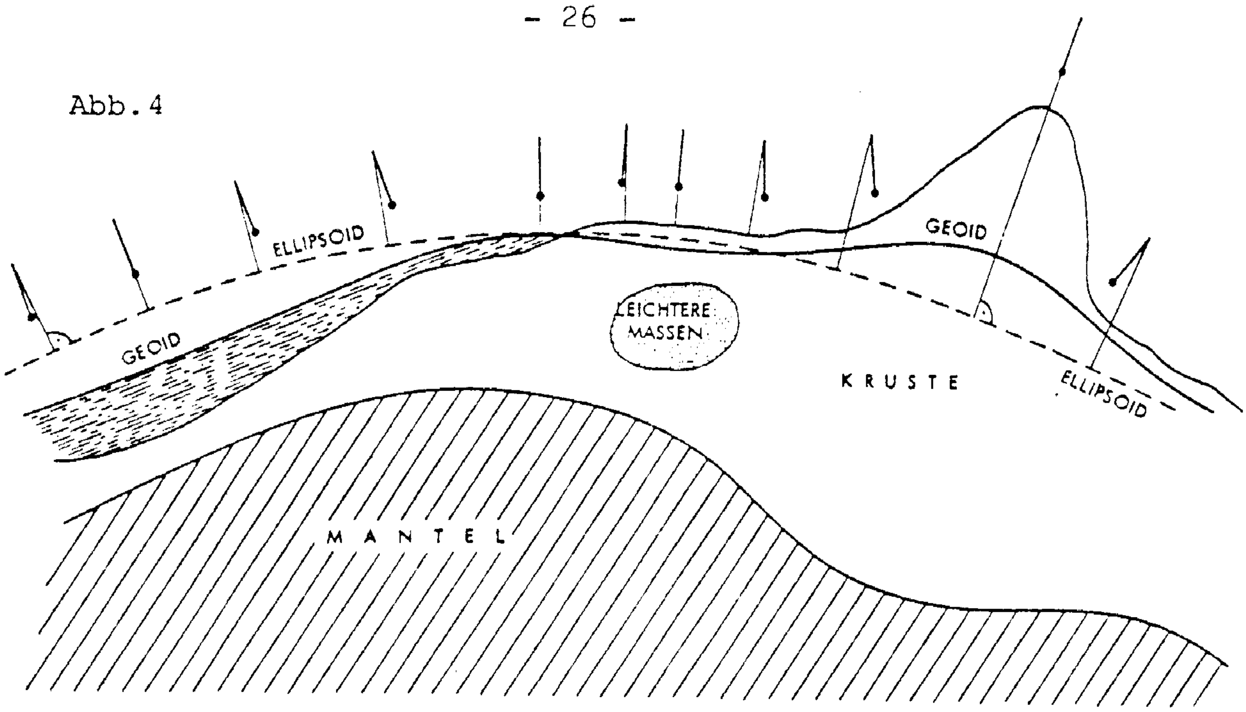
Die Gesamtheit aller Punkte gleichen Schwerepotentials nennt man Geopotentialflächen oder Niveauflächen. Sie stehen überall per definitionem senkrecht auf den Schwerevektor. Infolge der sichtbaren und unsichtbaren Massenunregelmäßigkeiten liegen die Niveau-

Abb.3



flächen von Ort zu Ort verschieden dicht, sie sind nicht parallel zueinander, und die Kraftlinien (Lotlinien) sind als ihre orthogonalen Trajektorien schwach gekrümmte Raumkurven. Aus der Eigenschaft der Niveauflächen, überall den Schwerevektor senkrecht zu schneiden, folgt unmittelbar, daß die Oberfläche der ruhend gedachten Ozeane (d.h. abgesehen von Wind, Strömungen, Gezeiten u.a.) eine Niveaufläche sein muß. Da die Oberfläche der Ozeane mehr als 2/3 der Erde bedecken, liegt es nahe, nach GAUSS ihre ungestörte Oberfläche als die mathematische Erdfigur zu definieren. Diese ausgezeichnete Niveaufläche trägt den Namen "Geoid". Man kann sich das Geoid unter den Kontinenten fortgesetzt denken, indem man die Meere durch ein Netz von Kanälen verbindet. Seine Definiton ist: $W = W_o = $ const. Seine Erforschung ist wichtig, weil es die Bezugsfläche der Meereshöhen ist. Das Potential W und seine ersten Ableitungen sind zwar im ganzen Raum eindeutig, endlich und stetig, seine zweiten Ableitungen sind aber unstetig an Unstetigkeitsstellen der Dichte, wie die Betrachtung der POISSONschen Gleichung zeigt. Die zweiten Ableitungen bestimmen aber die Krümmungsverhältnisse der Niveauflächen. Somit ändern sich die Krümmungsverhältnisse der Niveauflächen, und damit des Geoides, unstetig an Unstetigkeitsstellen der Dichte. Das Geoid ist keine analytische Fläche, es kann nur dargestellt werden, indem man punktweise seinen Abstand (die sogenannte Geoidundulation N) von einer einfachen analytischen Bezugsfläche (einem Rotationsellipsoid) bestimmt (siehe Abb.4). Allerdings kann man ein Stück einer Niveaufläche in der Umgebung eines Punktes im Außenraum in einem astronomischen Koordinatensystem durch Entwicklung in eine Taylorreihe analytisch darstellen. Die darin auftretenden 2.Ableitungen des Potentials sind mit sog. Gradiometern meßbar. Besonders einfach ist der Zusammenhang der mittleren Krümmung der Niveaufläche H mit dem Vertikalgradienten der Schwere $W_{zz} = dg/dh$, der mit empfindlichen Gravimetern gemessen

Abb.4



werden kann: $H = \frac{1}{2g}(-W_{zz} + 4\pi G \varrho - 2\omega^2)$.

Wie Messungen in schmalen Tälern und auf Berggipfeln zeigen, dürfte es mittlere Krümmungsradien zwischen 4500 und 8000 km geben.

Nun kann auch das Problem der Höhenbestimmung erläutert werden. Das Geoid, also die ungestörte Meeresoberfläche, bekommt die Höhe Null. Diese Nullhöhe wird in einem Hafen durch langjährige Pegelbeobachtungen gewonnen (für Österreich in Triest). Ausgehend von diesem Pegel können nun durch sog. geometrisches Nivellement Höhenunterschiede sehr genau gemessen werden. Viele solcher differentieller Höhenunterschiede geben durch Aufsummierung die Höhen von Festpunkten im ganzen Land. Leider ist diese Höhenmessung vom Wege abhängig. Der Grund liegt in der Nicht-Parallelität der Niveauflächen. Ein Gedankenexperiment macht dies verständlich (siehe Abb.6). In O befände sich der Pegel. Man denke sich nun die Höhe von P auf zwei verschiedenen Wegen bestimmt: Einmal von O entlang der Lotlinie nach O' und weiter entlang der Niveaufläche nach P. Der zweite Weg führe von O über P' nach P. Da das Nivellement entlang einer Niveaufläche den Höhenunterschied Null ergibt, erhält

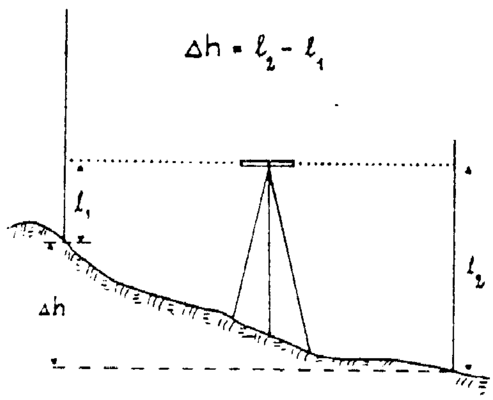


Abb.5

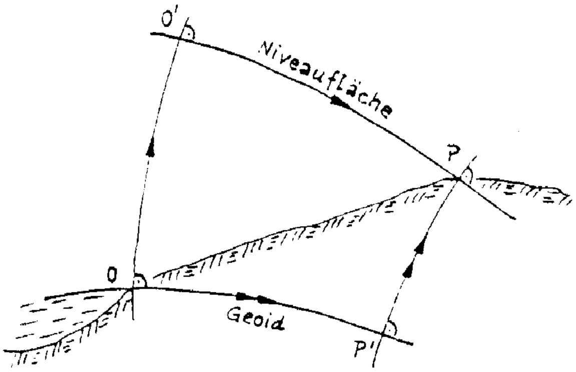


Abb.6

man als Ergebnis der Messungen einmal die Länge der Lotlinie OO', das andere Mal P'P. Tatsächlich können Höhen (mit der Dimension Meter) gar nicht gemessen werden, sondern wir können nur Potentialdifferenzen messen. Aus der Beziehung: $dW = - g.dh$ folgt

$$W_O - W_P = -\int_O^P g.dh = C.$$

Dieses Ergebnis, die sog. geopotentielle Kote C, ist vom Wege unabhängig. Ein Nivellement über größere Entfernungen gibt nur korrekte Ergebnisse in Verbindung mit Schweremessungen. Das praktische Vermessungswesen möchte aber mit Höhen (in Metern) und nicht mit Arbeitswerten rechnen. Dazu bieten sich grundsätzlich zwei Möglichkeiten an:

a) Die dynamischen Höhen: Sie sind geometrisch nicht erklärbar, haben aber den großen Vorteil, daß Punkte ein und derselben Niveaufläche gleiche Höhen erhalten (wie es sein muß, da zwischen ihnen kein Wasser fließen kann).

b) Die orthometrischen Höhen oder Meereshöhen: Sie sind geometrisch sehr anschaulich, stellen sie doch in jedem Punkt die Länge seiner Lotlinie P'P dar. Allerdings erhalten nun Punkte ein und derselben Niveaufläche verschiedene Höhen!
In der Wissenschaft wird mit den geopotentiellen Koten gearbeitet.

Für die Bestimmung des Geoides und des Schwerefeldes der Erde wird nun ein geometrisch und physikalisch definierter Bezugskörper eingeführt, der die Normalfigur der Erde darstellen soll. Auch das praktische Vermessungswesen und die Kartographie brauchen eine einfache Rechenfläche. Die einfachste geometrische und physikalische Näherungsfigur für den Erdkörper ist ein Rotationsellipsoid. Ein solches Ellipsoid kann mit einem künstlichen Schwerefeld ausgestattet werden, sodaß seiner Oberfläche ein theoretisches Potential oder Normalpotential U zukommt (Abb.7). Dieses Ellipsoid heißt Niveauellipsoid. Folgerichtig ist dann grad $U = \vec{\gamma}$, die theoretische Schwere oder auch Normalschwere. Die Geodäsie arbeitet nun

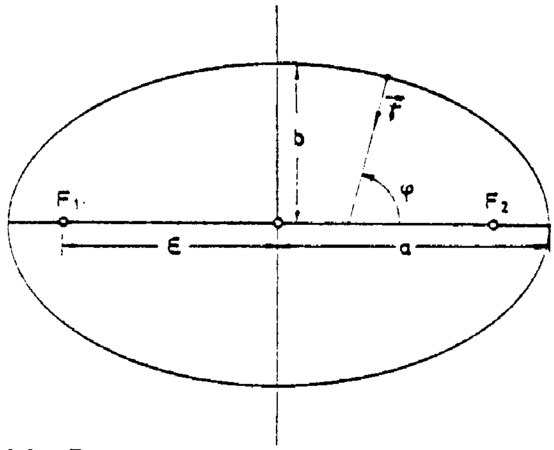


Abb.7

$$U = U_0 + \frac{GM}{\varepsilon} \arctan \frac{\varepsilon}{b} + \frac{\omega^2}{3} a^2 \quad ;$$

$$\gamma_0 = \frac{a \gamma_A \cos^2\varphi + b \gamma_p \sin^2\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} \quad ;$$

nicht mit den direkt gemessenen Schwerewerten g, sondern immer mit den Differenzen $\Delta g = g - \gamma$, den sog. Schwereanomalien. Das Niveauellipsoid selbst ist durch 4 Konstanten vollständig bestimmt, z.B. durch:

a = Äquatorradius der Erde,

ω = Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation,

GM = Produkt aus Gravitationskonstanter und Erdmasse,

J_2 = $(C - A)/Ma^2$ = dynamische Abplattung; C = Trägheitsmoment um die Rotationsachse, A = um die Äquatorebene.

Das Niveauellipsoid wird nun definiert durch das Gleichsetzen der ellipsoidischen Konstanten ω, GM und J_2 mit jenen Werten, die diese Größen für die wirkliche Erde annehmen, und der Äquatorradius a wird so bestimmt, daß Geoid und Ellipsoid dasselbe Volumen umschließen. Letztere Forderung ist erfüllt, wenn die Abstände des Geoides vom Ellipsoid in Summe über die ganze Erde verschwinden. Die Winkelgeschwindigkeit wird mit hoher Genauigkeit von der Astronomie geliefert, die Konstante GM wird durch Beobachtungen des Mondes und von künstlichen Satelliten aus dem 3.KEPLERschen Gesetz gewonnen. J_2 schließlich folgt aus der sogenannten Präzessionsbewegung der Satellitenbahnen.

Das so bestimmte Ellipsoid nennt man "mittleres Erdellipsoid", und daß es eine gute Wahl ist, erkennt man daran, daß die Geoidundulationen überall unter $\pm$ 100 m bleiben. Die derzeit besten Daten des mittleren Erdellipsoides sind:

$a = 6\,378\,137$ m, $GM = 3\,986\,005 . 10^8\ m^3 s^{-2}$

$J_2 = 1\,082{,}63 . 10^{-6}$, $\omega = 7\,292\,115 . 10^{-11}$ rad s^{-1},

(das ω der wirklichen Erde ist leicht variabel!)

Abgeleitete Größen:

f = 1/298,257 222 101 (geometrische Abplattung)

$\gamma_Ä$ = 9,780 326 7715 m s^{-2} (Normalschwere am Äquator)
γ_P = 9,832 186 3685 m s^{-2} (Normalschwere am Pol)
W_o = 62 636 860,85 m^2s^{-2} (Potential des Geoides).

Die Bestimmung der Undulationen N des Geoides ist auf mehrere Arten möglich: Durch Schweremessungen (gravimetrisches Verfahren), durch astronomisch-geodätische Messungen und durch Satellitenbeobachtungen.

Beim gravimetrischen Verfahren wird zunächst das Schwerepotential des Geoides W zerlegt in das Normalpotential U und ein Störpotential T: W = U + T. W und U sind im Außenraum harmonisch, also ist auch T harmonisch, das ist aber nur dann der Fall, wenn das Geoid zum Rand der Masse gemacht wird, d.h. alle über ihm liegenden Massen müssen rechnerisch entfernt werden. Dies geschieht durch Reduktion der an der Oberfläche gemessenen Schwerewerte g auf das Geoid durch Attraktionsberechnungen. Das Störpotential äußert sich durch das Auftreten der (reduzierten) Schwereanomalien $\Delta g^* = g^* - \gamma$. Zwischen Störpotential und Undulation besteht die einfache Beziehung: $N = T/\gamma$. Das Störpotential ist mit der Meßgröße Δg^* durch eine partielle Differentialgleichung 1.Ordnung verknüpft, die die Fundamentalgleichung der physikalischen Geodäsie genannt wird:

$$-\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right)T = \Delta g^* .$$

Wie man sieht, handelt es sich dabei um eine 3.Randwertaufgabe. Die Lösung wird durch Entwicklung nach LAPLACEschen Kugelflächenfunktionen gewonnen, und wurde schon 1849 von STOKES angegeben. Sie liefert das Störpotential und damit die Undulation für einen Punkt aus einer Integralformel, zu deren Auswertung theoretisch die Kenntnis der Schwereanomalien in allen Punkten der Erde nötig ist. Nun sind aber die Schwereanomalien sehr ungleich über die Erde verteilt, auf den Weltmeeren fehlen sie über weite Strecken ganz. Das hat zu sehr anspruchsvollen Verfahren der Prädiktion von Schwereanomalien auf statistischer Grundlage geführt. Das Δg-Feld wird als stochastischer Prozeß aufgefaßt. Ausgangspunkt ist die von der Entfernung zwischen zwei Schwereanomalien abhängige Korrelation zwischen den Schwerewerten, die zur sogen. Kovarianzfunktion führt: $C(s) = M\{\Delta g \Delta g'\}$. (M bedeutet das Mittel aller Produkte von Paaren von Schwereanomalien im Abstand s).

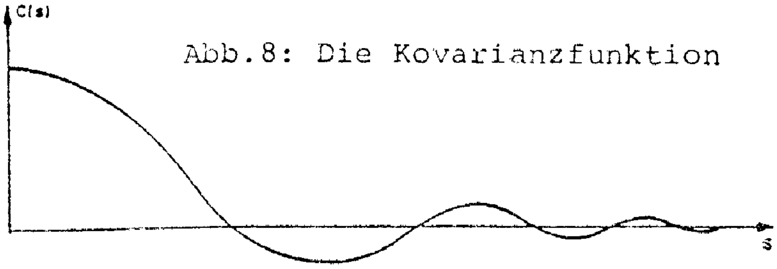


Abb.8: Die Kovarianzfunktion

Wegen der vorhin erwähnten notwendigen Reduktion der gemessenen Schwerewerte auf das Geoid ist das geschilderte Verfahren theoretisch unbefriedigend.

Nach MOLODENSKI formuliert man heute die Randwertaufgabe auch direkt für die physische Erdoberfläche.

Dies führt auf eine äußerst schwierige nichtlineare Integralgleichung 2.Art mit unsymmetrischem Kern (Typ Fredholm), die durch Iteration gelöst wird:

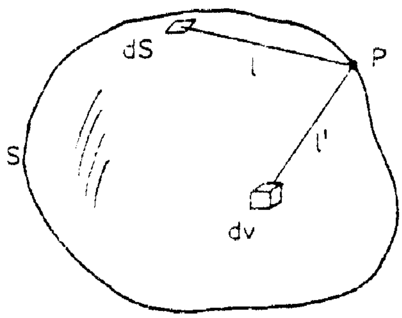


Abb.9

$$- 2\pi W + \iint_S \left[W \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right) - \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial W}{\partial n} \right] dS +$$

$$+ 2\pi\omega^2(x^2 + y^2) + 2\omega^2 \iiint_{Erde} \frac{dv}{l'} = \gamma$$

Interessant und wichtig ist, daß der erste Iterationsschritt gerade die Lösung von STOKES darstellt. Die allgemeine Existenz und Eindeutigkeit des Problems von MOLODENSKI ist noch gar nicht gesichert, sie wurde erst kürzlich von Lars HÖRMANDER für ziemlich glatte Oberflächen bewiesen.

Das praktische Vermessungswesen der einzelnen Staaten stützt sich auf die jeweiligen Landesvermessungen. Eine Landesvermessung erfolgt durch Triangulation und Trilateration (d.h.durch Winkel- und Streckenmessungen in Dreiecksnetzen). Die Berechnung dieser Netze geschieht auf einem Ellipsoid. Dazu werden die Eckpunkte des Netzes mit Hilfe der Flächennormalen auf ein geeignetes Ellipsoid projiziert. Das erreicht man durch Anbringung kleiner Korrekturen an die gemessenen Winkel und Strecken. Die Seiten der Dreiecke des Netzes werden von geodätischen Linien gebildet, und Berechnungen mit Hilfe von geodätischen Linien des Rotationsellipsoides führen grundsätzlich auf elliptische Integrale aller drei Gattungen. Als geeignetes Ellipsoid böte sich heute das mittlere Erdellipsoid an, leider kennt man es erst seit wenigen Jahren. Jeder Staat hat seinem Vermessungssystem ein anderes Ellipsoid zugrundegelegt, dessen Lage zum Geoid im betreffenden Staatsgebiet <u>willkürlich</u> angenommen wurde. Es wurde lediglich so orientiert, daß seine Figurenachse parallel zur Rotationsachse der Erde liegt. Ein solches Ellipsoid nennt man Referenzellipsoid. Nun erkennt man auch, daß Lage und Höhe eines Festpunktes sich auf völlig verschiedene Systeme beziehen, nämlich auf Referenzellipsoid und Geoid, deren gegenseitige Lage erst mühsam durch astronomische Beobachtungen bestimmt werden muß. In Österreich sind diese Arbeiten gerade im gange, die Zahl der schon beobachteten Stationen beträgt rund 600. Im Prinzip beruht dieses Verfahren auf der Bestimmung der kleinen Winkel zwischen den Flächennormalen auf Geoid und Ellipsoid. Der Vorteil diese Verfahrens der Geoidbestimmung liegt darin, daß es die Feinstruktur des Geoides mit mindestens Dezimetergenauigkeit liefern kann, während die gravimetrische Methode weltweit noch Fehler von 2-3 m aufweist. Allerdings kann das astronomische Verfahren keine Absolutwerte der Geoidundulationen geben, sondern nur deren Veränderungen. Abb.12 zeigt einen Ausschnitt des Geoides in der Steiermark (vorläufig und relativ) in axonometrischer Darstellung (Bearbeitung: H.Sünkel, TU Graz).

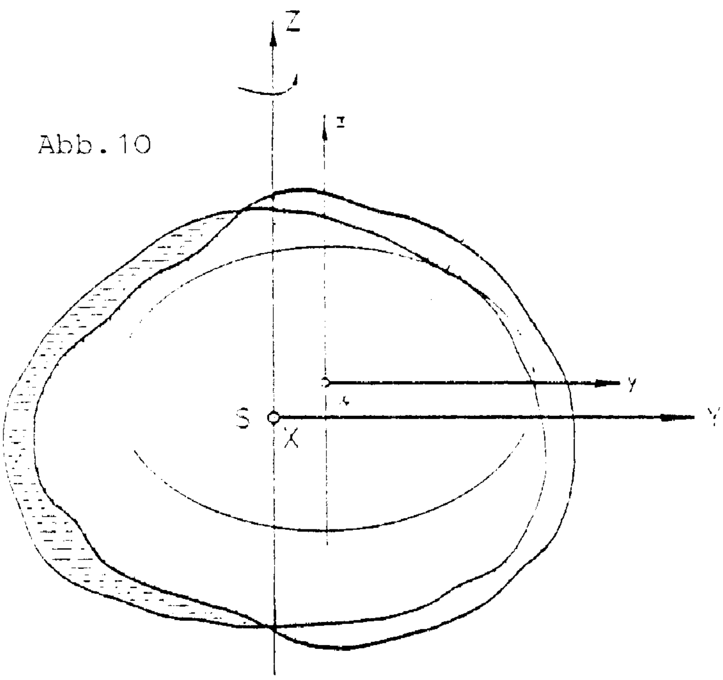


Abb.10

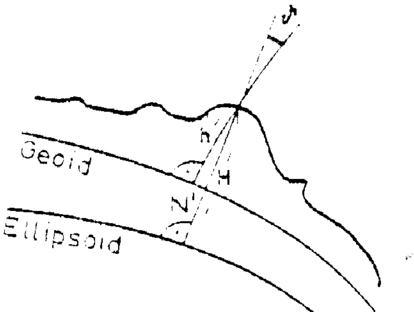


Abb.11

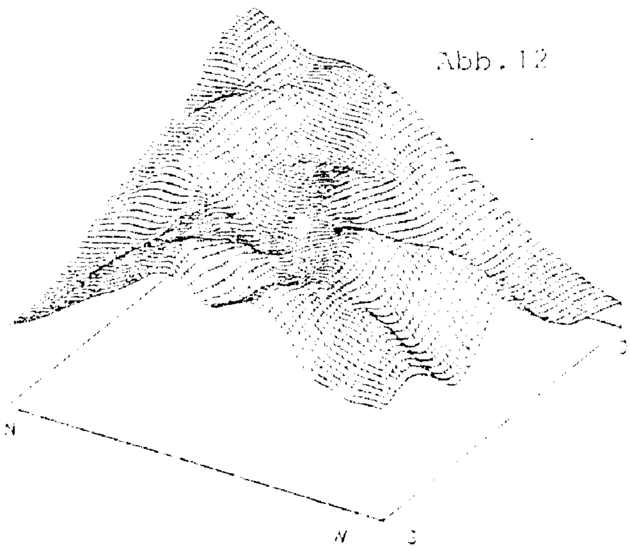


Abb.12

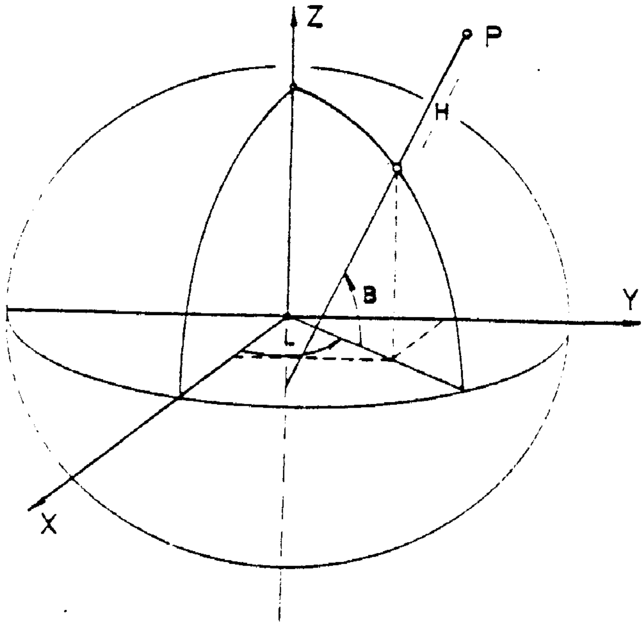


Abb.13

$$x = \left[\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} + H\right] \cos B \cos L$$

$$y = \left[\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} + H\right] \cos B \sin L$$

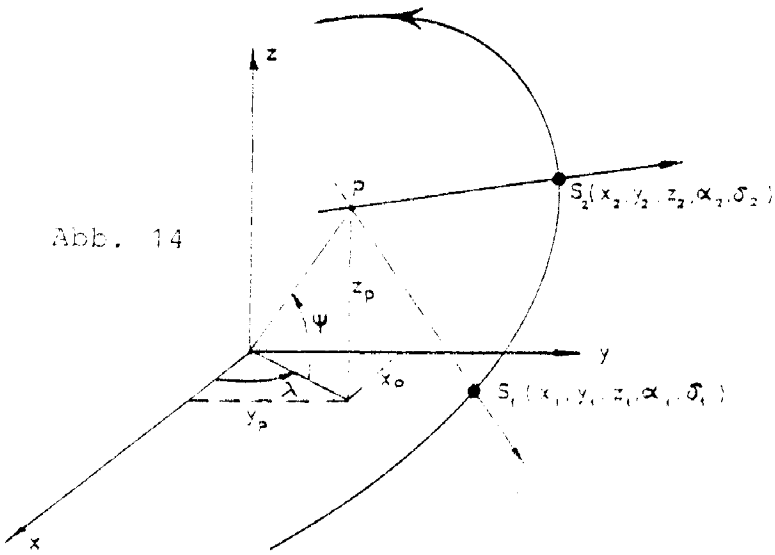
$$z = \left[\frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} + H\right] \sin B$$

Die Lage eines Punktes auf dem Referenzellipsoid wird durch die zwei Parameter Breite B und Länge L angegeben. Kennt man nun die Undulation N' und die Meereshöhe h, so folgt damit die Höhe H über dem Ellipsoid: H = h + N' (siehe Abb.11) Daraus können dann in einfacher Weise die kartesischen Koordinaten eines Punktes berechnet werden, allerdings sind sie kaum als gleichberechtigt und gleichwertig zu bezeichnen. Wir Geodäten hoffen, daß die einzelnen Staaten sich einmal entschließen, von ihren Referenzsystemen auf ein einheitliches Weltsystem überzugehen. Das könnte durch eine Koordinatentransformation geschehen, die aus einer Rotation, einer Translation und einer Maßstabsänderung besteht. Es ist also die Bestimmung von 7 Transformationsparametern notwendig, wozu im Prinzip drei idente Punkte in beiden Systemen ausreichen. Die Bestimmung von cartesischen Koordinaten im Weltsystem ist durch die kosmische Geodäsie möglich geworden, einer Geodäsie also, die ausserirdische Objekte zur Beobachtung heranzieht.

Die künstlichen Satelliten stellen das technisch aufwendigste, aber auch das schärfste Instrument der modernen Erdmessung dar. Bemerkenswert an der Satellitengeodäsie ist, daß sie sich gewissermaßen am eigenen Schopf aus dem Sumpf gezogen hat. Denn, um Bahnstörungen von künstlichen Satelliten beobachten zu können, muß man die genauen Positionen der Beobachtungsstationen kennen, diese wieder kann man nur gewinnen, wenn man die Satellitenbahnen kennt.

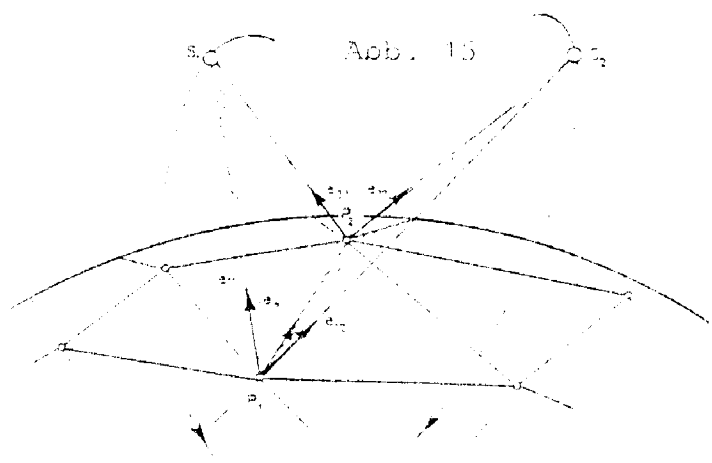
Die Satelliten können in mehrfacher Weise benützt werden: als reine Hochziele zur Lösung geometrischer Aufgaben, als Testsonden, mit denen das Schwerefeld linienförmig abgetastet wird und als selbstregistrierende Instrumente. Am Anfang der Satellitengeodäsie stand die photographische Beobachtung. Kennt man die Bahn des Satelliten, sodaß seine 3 cartesischen Koordinaten zu jedem Zeitpunkt angegeben werden können, und legt man durch Photographie des Satelliten gegen das bekannte System der Fixsterne die Richtung Station - Satellit fest, so ist durch Punkt und Richtung eine Gerade im Raum definiert, auf der die Beobachtungsstation liegen muß. Eine zweite Beobachtung desselben oder eines anderen Satelliten liefert eine zweite Gerade, und der Schnitt der beiden Geraden liefert die Koordinaten der Station.

Abb. 14



Wird ein Satellit von 2 weit entfernten Stationen gleichzeitig gegen den Sternenhintergrund photographiert, so definieren die zwei Richtungen eine Ebene im Raum. Wird der Vorgang mit einem geeigneten zweiten Satelliten wiederholt, hat man eine zweite Ebene. Der Schnitt der beiden Ebenen liefert den Sehnenvektor zwischen den beiden Stationen. Auf diese Weise kann ein ganzes Netz aufgebaut werden (Satellitentriangulation).

Abb. 15



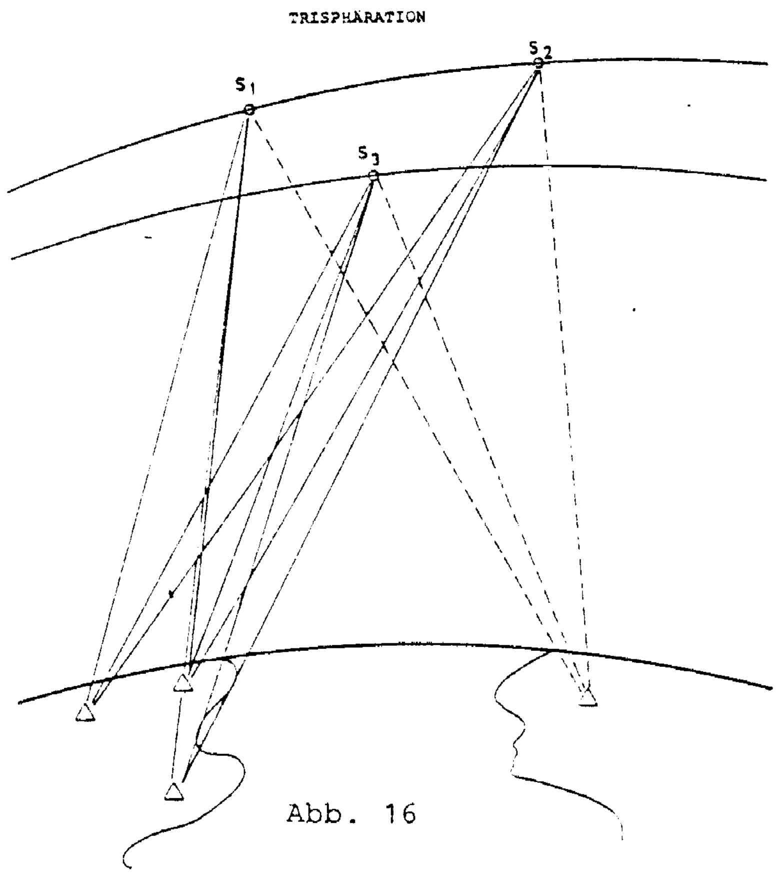


Abb. 16

Große Fortschritte hat die Entfernungsmessung nach Satelliten ermöglicht. Diese erfolgt durch Messung der Laufzeit von kurzen Laserimpulsen, die von den mit Reflektoren ausgestatteten Satelliten zurückkommen. Durch sogen. Trisphäration ist es möglich, von drei bekannten Stationen aus, die Koordinaten von Neupunkten zu bestimmen, ohne daß die Satellitenbahnen bekannt sind. Macht man nämlich von den drei Stationen simultane Entfernungsmessungen zu einem Satelliten, so ist dessen Position als Schnitt dreier Kugeln festgelegt. Drei solcher Satellitenpositionen wiederum bilden die Basis zur analogen Bestimmung eines Neupunktes, von dem aus ebenfalls simultane Entfernungsmessungen zu den drei Satelliten vorliegen müssen. Die Gleichzeitigkeit ist praktisch nicht zu erreichen. Es werden deshalb viele Einzelmessungen zusammen mit genauen Zeitregistrierungen gemacht und alle Beobachtungen auf einen gemeinsamen Zeitpunkt reduziert. Die Genauigkeit der Distanzmessung liegt derzeit bei einigen Dezimetern, die Zenitmeter könnten in naher Zukunft erreicht werden. Laserdistanzmessungen können nur nachts bei klarem Himmel gemacht werden.

Völlig unabhängig von Tageszeit und Wetter ist die Messung von Entfernungsdifferenzen mit Hilfe des Dopplereffekts (Abb.17). Ein Satellit sendet eine Ultrakurzwelle bekannter Frequenz aus, die von einem Empfangsgerät registriert und mit einer Kontrollfrequenz verglichen wird. Die vom Satelliten gesendete Frequenz erfährt aufgrund des Dopplerprinzips eine Erhöhung bei Annäherung und eine Erniedrigung bei Entfernung des Satelliten von der Station. Diese Dopplerverschiebung wird gemessen und über ein bestimmtes Zeitintervall (z.B. 30 sec.) integriert. Aus dem Integrationsergebnis und dem Zeitintervall folgt

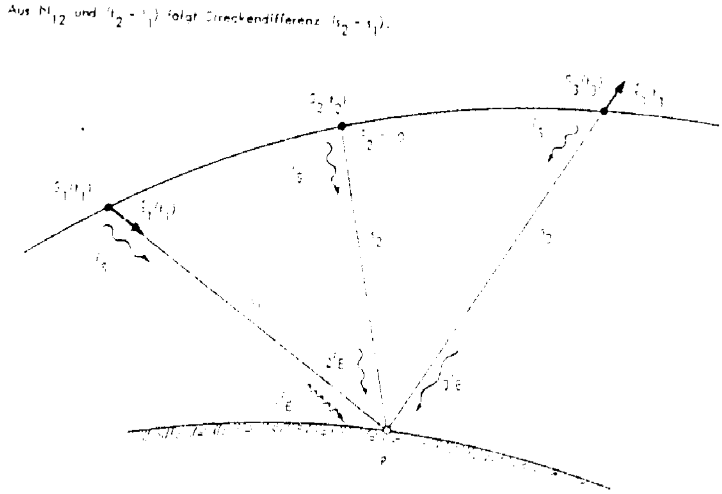
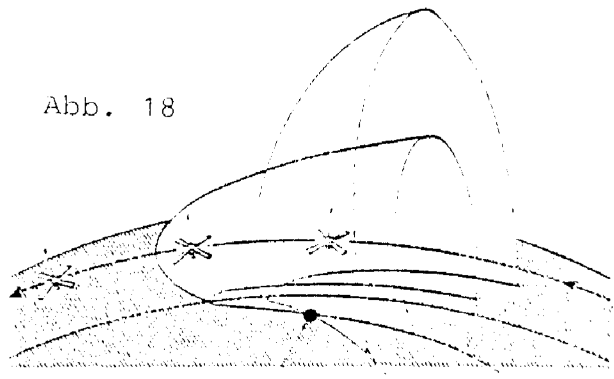


Abb. 17

die Entfernungsdifferenz Station - Satellit zu Beginn und Ende der Integration. Damit ist als geometrischer Ort der Station ein Hyperboloid festgelegt und die Stationskoordinaten folgen als Schnitt von drei solchen Hyperboloiden mit jeweils zwei bekannten Satellitenörtern als Brennpunkte. Das Verfahren wurde ursprünglich nur zur Navigation von Schiffen entwickelt, wird heute aber besonders für die Zwecke der Erdmessung genützt. Die Genauigkeit der Punktbestimmung ist weltweit $\pm$ 2-3 m, zwischen benachbarten Punkten bei gleichzeitiger Beobachtung 0,2-0,3 m. Ein wichtiges Verfahren ist die Satellitenaltimetrie, bei der ein Satellit mit bekannter Bahn ständig mittels Radar seinen vertikalen Abstand von der Meeresoberfläche mißt. Damit kann über 2/3 der Erde unmittelbar die Geoidform bestimmt werden.

Abb. 18



Bei der sogen. dynamischen Methode der Satellitengeodäsie wird der Satellit als ein Sensor angesehen, der sich im Schwerefeld der Erde bewegt. Das Gravitationspotential der Erde kann formal in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe entwickelt werden.

$$V = \frac{GM}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\left[J_{n,m}\,C_{n,m}(\varphi,\lambda) + K_{n,m}\,S_{n,m}(\varphi,\lambda)\right]\right\}$$

Wir unterscheiden drei Arten von Kugelfunktionen. Solche die nur von der Breite abhängen (zonale KF), die nur von der Länge abhängen (sektorielle KF) und solche, die von Breite und Länge abhängen (tesserale KF). Die zugehörigen Koeffizienten J_{nm}, K_{nm} (Massefunktionen) charakterisieren die Struktur des Schwerefeldes. Das möge an den zonalen KF erklärt werden. Die 0.Ordnung der Entwicklung repräsentiert das Potential einer Kugel von der Gesamtmasse der Erde. Die 1.Ordnung stellt eine Schwerpunktverschiebung dar und darf nicht auftreten, wenn das Koordinatensystem im Schwerpunkt der Erde liegt. Die 2.Ordnung repräsentiert die Abplattung der Erde, die 3.Ordnung dagegen eine Unsymmetrie zur Äquatorebene, die 4.Ordnung beschreibt wieder eine äquatorsymmetrische Massenanordnung u.s.f. Nun kommen noch die sektoriellen und tesseralen Glieder dazu, deren Überlagerung schließlich die Gesamtstruktur des Schwerefeldes liefert. Die beobachtbaren Bahnstörungen eines Satelliten lassen sich in Funktion der Koeffizienten J_{nm} und K_{nm} ausdrücken, und damit sind die Massefunktionen bestimmbar.

Die zonalen Koeffizienten verursachen hauptsächlich säkulare und langperiodische Störungen, die tesseralen und sektoriellen Koeffizienten dagegen nur kurzperiodische Störungen. So wurde bereits nach dem Start des 4. künstlichen Satelliten 1958 (Vanguard I) die Existenz der zonalen Massefunktion 3. Ordnung J_3 und damit eine Unsymmetrie der Erde zur Äquatorebene nachgewiesen. Das hat zu dem unglücklichen Ausdruck von der "Birnenform der Erde" geführt (siehe Abb. 19).

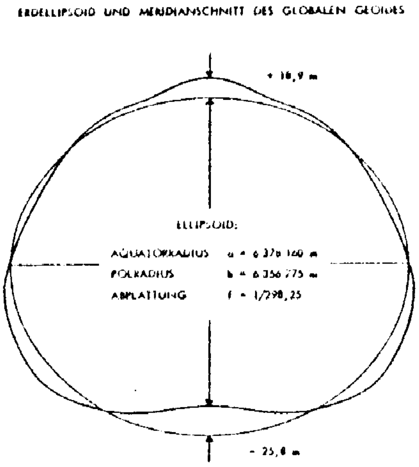


Abb. 19

Die eigentlichen Beobachtungsgrößen sind die polaren Koordinaten des Satelliten, festgelegt durch 2 Richtungen und die Entfernung. Diese Beobachtungsgrößen sind nun Funktionen der Stationskoordinaten, der Zeit, der Bahnelemente und der unendlich vielen Koeffizienten J_{nm}, K_{nm}:

$$s = s(X_p, Y_p, Z_p; t; r_o, e, i, \Omega, \omega, T; J_{nm}, K_{nm}) .$$

Jede Beobachtung liefert eine solche Gleichung. Die Schwierigkeit liegt vor allem darin, daß die zu bestimmenden Paramter untereinander korreliert sind und daß ihre Zahl unendlich groß ist. Um aus einer endlichen Zahl von Beobachtungen eine Lösung zu finden, müssen Glieder höherer Ordnung willkürlich gleich Null gesetzt werden. Abb. 20 zeigt eine Karte gleicher Geoidundulationen.

GEOIDKARTE NACH GAPOSCHKIN, 10 m- INTERVALL

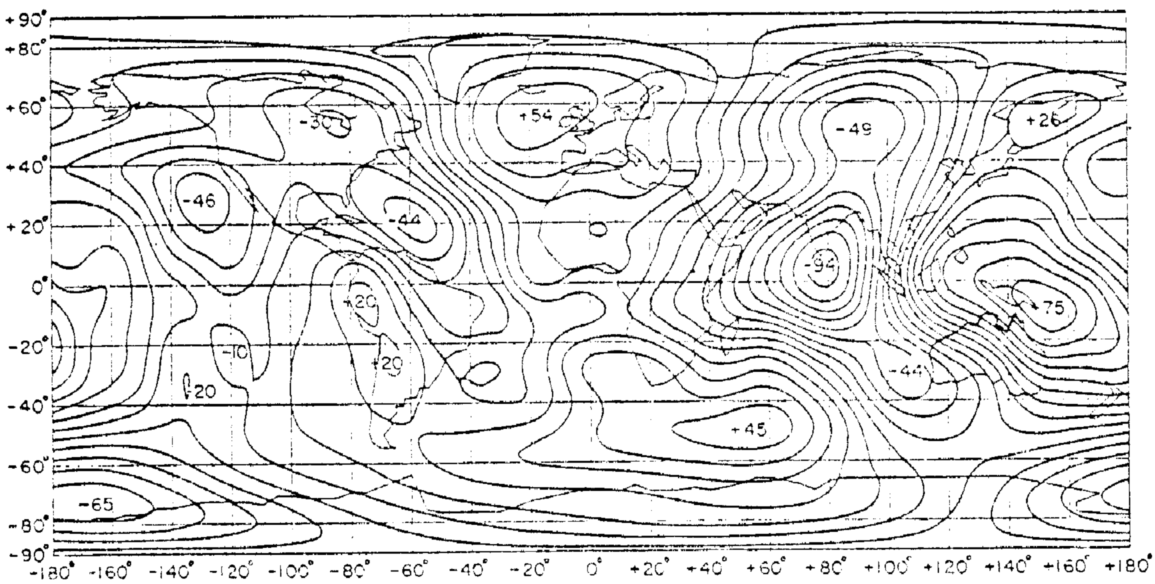


Abb. 20

Heute geht man schon wieder einen Schritt weiter, indem man die Satelliten sich gegenseitig überwachen läßt, insbesondere tiefkreisende durch weniger gestörte hochkreisende Satelliten (Satellite to Satellite Tracking). Gemessen werden dabei Richtungen (Photographie), Entfernungen (Radar, Laser) und Entfernungsänderungen (Doppler), (siehe Abb. 21).

Heute werden auch Entfernungsmessungen zum Mond und der Empfang der Strahlung extragalaktischer Radioquellen (Quasare) für geodätische Zwecke benützt, vor allem zum Studium des Rotationsverhaltens der Erde.

Es wird aufgefallen sein, daß viele Lösungsansätze sehr einfach sind, man denke z.B. an die Trisphäration, bei der ein Neupunkt als Schnittpunkt dreier Kugeln bestimmt wird. Die tatsächliche numerische Lösung ist jedoch nicht so einfach. Zunächst führt das Problem der Trisphäration auf drei quadratische Gleichungen mit drei Unbekannten. Alle Beobachtungen sind mit Meßfehlern behaftet. Um deren Einfluß herabzudrücken, werden in der Geodäsie <u>immer</u> mehr Beobachtungen gemacht, als zur eindeutigen Lösung eines Problems notwendig wären, also z.B. bei der Trisphäration zehn statt drei Distanzmessungen. Dann hat man zehn quadratische Gleichungen mit drei Unbekannten und jedes Tripel von Gleichungen liefert ein anderes Ergebnis. Die Aufgabe lautet nun, nicht nur aus allen Beobachtungen die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten zu bestimmen, sondern auch Genauigkeitsaussagen über die Unbekannten zu machen. Für nicht-korrelierte, mit zufälligen Meßfehlern behaftete Beobachtungsgrößen hat Gauß dieses Problem durch seine Methode der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten gelöst. Der Name besagt, daß die Werte der Unbekannten so ermittelt werden, daß die Summe der Quadrate der Restfehler ein Minimum wird. Diese Methode reicht aber nicht mehr aus. Die Geodäsie muß heute eine riesige Anzahl von geometrischen und physikalischen Beobachtungen, die außerdem von ganz unterschiedlicher Genauigkeit und häufig auch miteinander korreliert sind, einer gemeinsamen Bearbeitung zu widerspruchs-

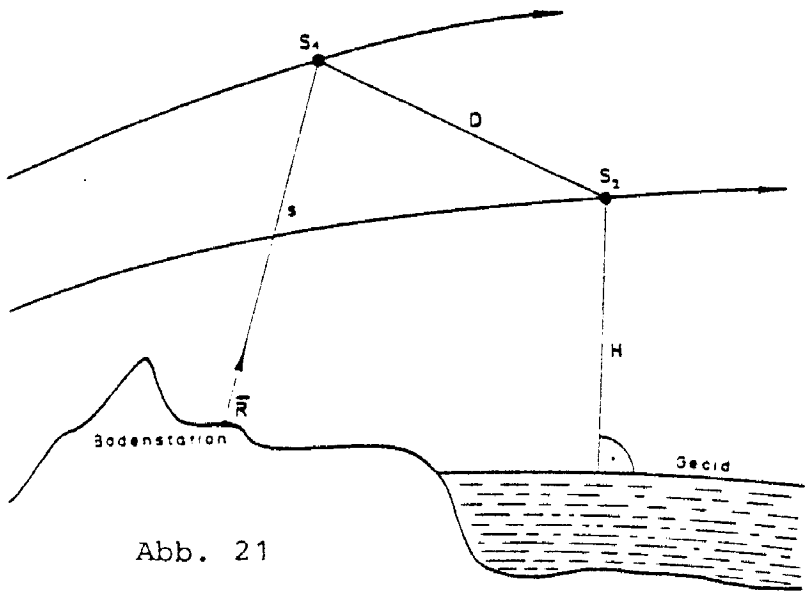
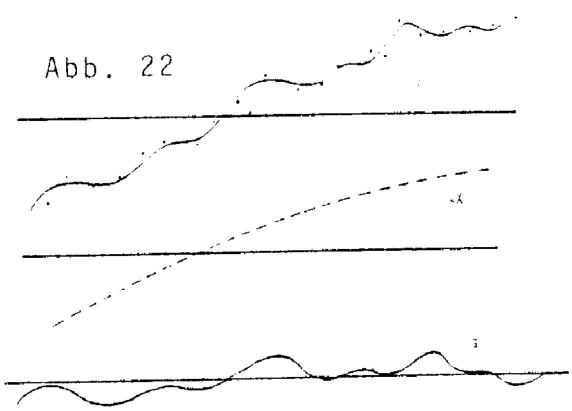


Abb. 21

$\vec{R}$ aus Photographie
s aus Laserdistanzmessung
H aus Radarmessungen
$\frac{ds}{dt}$ aus Dopplermessungen
$\frac{dD}{dt}$ aus Satellite to Satellite Tracking

freien Ergebnissen zuführen. Das leistet eine weitreichende Verallgemeinerung des GAUSS'schen Verfahrens, die Kollokation genannt wird. Die Beobachtungsgleichungen der Kollokation lauten allgemein $x = AX + s + n$. Darin ist x der Vektor der Beobachtungsgrößen. Er setzt sich aus einem systematischen Anteil AX und zwei voneinander unabhängigen zufälligen Anteilen s und n zusammen. X ist der Vektor der systematischen Parameter, A eine gegebene rechteckige Koeffizientenmatrix, s nennt man den Signalvektor, n den Vektor der Meßfehler. Die Bedeutung der Beobachtungsgleichung kann durch eine Zeichnung illustriert werden (Abb. 22). Die zufälligen Größen s und n besitzen den Mittelwert Null, ihr statistisches Verhalten wird durch eine sogenannte Kovarianzmatrix C beschrieben. Die Kollokation soll nun unter bestmöglicher Beseitigung der Meßfehler die Parameter X liefern und darüber hinaus aber auch die Berechnung des Signals s in nicht vermessenen Punkten gestatten. Die Kollokation vereinigt also Filterung, Ausgleichung und Prädiktion in einem Verfahren. Die Lösung des Problems ist gegeben durch:

Abb. 22



$$X = (A^T C^{-1} A)^{-1} A^T C^{-1} x$$

$$s_P = C_P^T C^{-1}(x - AX), \quad (s_P = \text{prädizierte Komponente des Signalvektors in P}).$$

Die Resultate der Kollokation besitzen die mit den gegebenen Beobachtungen maximal erreichbare Genauigkeit. Das Hauptproblem bei der praktischen Anwendung besteht in der Inversion der sehr umfangreichen Matrix C. Der große Vorteil der Methode liegt in der Kombination sämtlicher verfügbaren Beobachtungen.

Es ist die Meinung des Verfassers, daß der Unterricht an AHS und BHS von einer Einbeziehung der Probleme und Lösungsansätze der Geodäsie profitieren könnte.